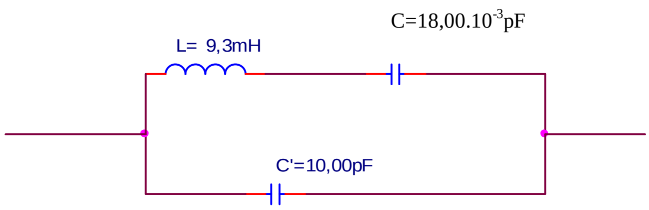
TD1 : Outils mathématiques pour la physique

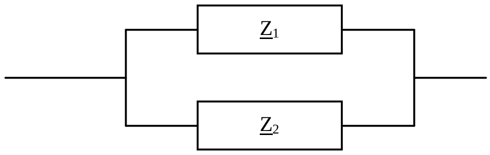
Exercice 1 : Etude d'une cellule à quartz (BTS 2005):

Un quartz est un système résonant que l'on rencontre très fréquemment en électronique (microphone, filtre, oscillateur…).
On modélise un quartz avec le modèle suivant :



1) Mettre dans un premier temps l'expression de l'impédance équivalente sous la forme suivante : $\underline{Z}(jw) = \dfrac{1+j^2LCw^2}{(1+j^2LCw^2)jC'w + jCw}$

Il est préférable de faire ce calcul d'impédance équivalente en deux étapes :



Avec :

$$\underline{Z}_1 = jLw + \frac{1}{jCw} = \frac{j^2LCw^2+1}{jCw}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{jC'w}$$

On en déduit alors l'expression de l'impédance équivalente :

$$\underline{Z} = \frac{\dfrac{j^2LCw^2+1}{jCw} \times \dfrac{1}{jC'w}}{\dfrac{j^2LCw^2+1}{jCw} + \dfrac{1}{jC'w}} = \frac{\dfrac{j^2LCw^2+1}{j^2CC'w^2}}{\dfrac{(j^2LCw^2+1)jC'w + jCw}{j^2CC'w^2}} = \frac{j^2LCw^2+1}{(j^2LCw^2+1)jC'w + jCw} = \frac{1+j^2LCw^2}{(j^2LCw^2+1)jC'w + jCw}$$

2) Donnez les expressions de w_s et w_p en fonction de L, C et C' qui permettent d'écrire l'impédance équivalente sous la forme :

$$\underline{Z}(jw) = \frac{-j}{(C+C')w} \frac{1-\left(\dfrac{w}{w_s}\right)^2}{1-\left(\dfrac{w}{w_p}\right)^2}.$$

On a donc :

$$\underline{Z}=\frac{1+j^2LCw^2}{(j^2LCw^2+1)jC'w+jCw}=\frac{1+j^2LCw^2}{jCw+jC'w+j^3LCC'w^3}=\frac{1}{j(C+C')w}\times\frac{1+j^2LCw^2}{1+\dfrac{j^3LCC'w^3}{j(C+C')w}}$$

$$\underline{Z}=\frac{-j}{(C+C')w}\times\frac{1+j^2LCw^2}{1+\dfrac{j^2LCC'w^2}{(C+C')}}$$

$$En\ \ posant: w_p=\sqrt{\frac{C+C'}{LCC'}}, w_s=\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

On retrouve :

$$\underline{Z}(jw)=\frac{-j}{(C+C')w}\frac{1-\left(\dfrac{w}{w_s}\right)^2}{1-\left(\dfrac{w}{w_p}\right)^2}$$

3) Ecrire l'impédance équivalente, $\underline{Z}(jf)$, en fonction de la fréquence.

On a : $\underline{Z}(jf)=\dfrac{-j}{2p(C+C')f}\dfrac{1-\left(\dfrac{f}{f_s}\right)^2}{1-\left(\dfrac{f}{f_p}\right)^2}$ avec : $w=2pf, w_s=2pf_s, w_p=2pf_p$

4) Calculez numériquement $f_s=\dfrac{1}{2p}\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ *et* $f_p=\dfrac{1}{2p}\sqrt{\dfrac{C+C'}{LCC'}}$ avec 5 chiffres significatifs.

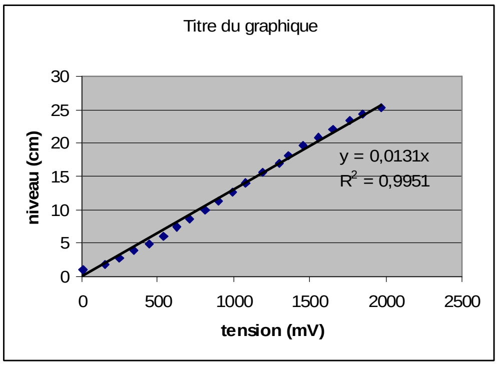
On calcule :

$$f_s=\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{1}{LC}}\ =12{,}301MHz$$

$$et\ \ f_p=\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{C+C'}{LCC'}}=12{,}312MHz$$

Exercice 2 : Régression linéaire et développement limité :

On considère un capteur de niveau de cuve fournissant une tension dont la valeur est fonction du niveau de liquide dans une cuve.
Les mesures donnent le relevé suivant :



1) Grâce à Excel, on effectue une régression linéaire du nuage de points. A l'aide du graphe ci-dessus sur lequel on retrouve l'équation de la courbe, donnez l'expression de la hauteur de niveau de cuve, notée h et exprimée en mètre, en fonction de la tension de sortie du capteur, notée U et exprimée en Volt.

Attention aux unités !!!, la hauteur h est donnée en cm et la tension U en mV. Donc :

$$h(cm) = 0{,}0131U(mV)$$
$$h(m).10^2 = 0{,}0131U(V).10^3$$
$$h(m) = 0{,}131U(V)$$

2) En fait la loi théorique est $h = \sin(13{,}1.10^{-3}U)$, montrez, à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 que la loi théorique coïncide avec la loi expérimentale.

Il s'agit de faire un développement limité de la fonction : $h(U) = \sin(13{,}1.10^{-3}U)$

Donc $h(U) = h(0) + Uh'(0)$ à l'ordre 1 et au voisinage de « 0 »

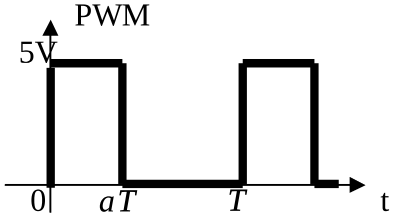
Avec : $h(0) = 0; h'(U) = 13{,}1.10^{-3}\cos(13{,}1.10^{-3}U); h'(0) = 13{,}1.10^{-3} \Rightarrow h(U) \approx 13{,}1.10^{-3}U$

On retrouve la loi donnée sur le graphe (avec donc h(cm) et U (mV))

Exercice 3 : Transmission par PWM :

La PWM (Pulse Width Modulation) est un moyen de faire de la transmission de données. En effet, cette méthode permet de transmettre une information (par exemple une tension U) en modifiant le rapport cyclique, a , d'un signal de type carré de période constante T . Une structure permet donc d'obtenir une relation de linéarité entre U et a : $a = kU$ avec k constante.

Le graphe ci-dessous, donne la représentation du signal PWM pour une tension U donnée :



1) Calculez la valeur moyenne de ce signal en fonction du rapport cyclique a

On peut utiliser les définitions vues en cours (qui sont strictement équivalentes)

- 1e méthode :

$$\overline{PWM} = \frac{aire.du.dessus - aire.du.dessous}{T} = \frac{5aT}{T} = 5a$$

- 2e méthode :

$$\overline{PWM} = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{aT} 5dt = \frac{1}{T}[5t]_0^{aT} = \frac{5aT}{T} = 5a$$

2) Quelle structure proposez-vous pour que l'on puisse retrouver le signal utile, c'est-à-dire une tension proportionnelle à U .

La valeur moyenne est donc $5a = 5kU$. L'information utile U se retrouve donc dans la valeur moyenne de la PWM. Un filtre de type passe bas permettra donc de retrouver cette valeur en choisissant une fréquence de coupure éliminant toutes les fréquences.

Exercice 4 : Etude de fonctions de transfert :

Pour l'étude de fonctions de transfert dans des diagrammes de Bode, on se ramènera toujours à remplir le tableau qui suit.
Faire l'étude, donc en complétant le tableau à deux reprises, des deux fonctions de transfert suivantes intervenant dans un système de réception radio à PLL :

$$\underline{T}(jw) = a\frac{(1+j\frac{w}{w_0})}{j\frac{w}{w_0}} \quad \text{et} \quad T(jw) = a\frac{(1+\frac{jw}{w_0})}{\left(\frac{jw}{w_0}\right)^2}$$ (a et w_0 sont des constantes positives)

Pour : $\underline{T}(jw) = a\frac{(1+j\frac{w}{w_0})}{j\frac{w}{w_0}}$

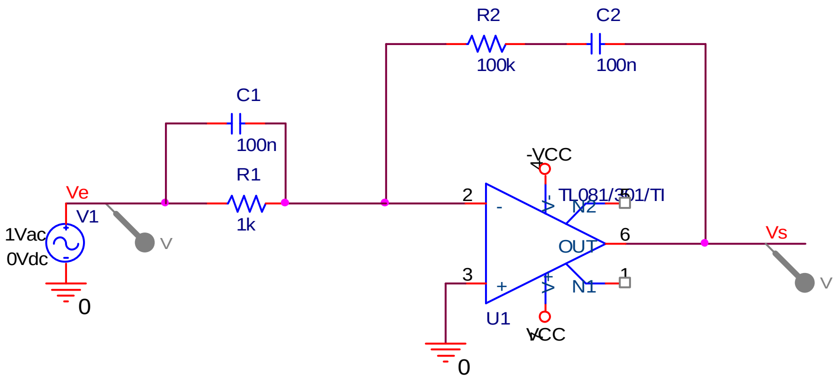
	$w << w_O$	$w >> w_0$	$w = w_0$
$\underline{T}(jw)$	$\underline{T}(jw) = a\frac{1}{j\frac{w}{w_0}}$	$\underline{T}(jw) = a\frac{j\frac{w}{w_0}}{j\frac{w}{w_0}} = a$	$\underline{T}(jw) = a\frac{(1+j)}{j}$
$\lvert\underline{T}(jw)\rvert$	$\lvert\underline{T}(jw)\rvert = \frac{aw_0}{w}$	$\lvert\underline{T}(jw)\rvert = a$	$\lvert\underline{T}(jw)\rvert = a\frac{\sqrt{2}}{1}$
$G = 20Log\lvert T(jw)\rvert$	$G = 20Log(\frac{aw_0}{w})$	$G = 20Log(a)$	$G = 20Log(a) + 20Log(\sqrt{2})$ $G = 20Log(a) + 3dB$
$Arg(\underline{T}(jw))$	$-\frac{p}{2}$	0	$\frac{p}{4} - \frac{p}{2} = -\frac{p}{4}$

Pour $T(jw) = a\dfrac{(1+\frac{jw}{w_0})}{\left(\frac{jw}{w_0}\right)^2}$

	$w << w_O$	$w >> w_0$	$w = w_0$
$\underline{T}(jw)$	$T(jw) = a\dfrac{1}{\left(\frac{jw}{w_0}\right)^2}$	$T(jw) = a\dfrac{\frac{jw}{w_0}}{\left(\frac{jw}{w_0}\right)^2} = a\dfrac{1}{\left(\frac{jw}{w_0}\right)}$	$T(jw) = a\dfrac{(1+j)}{(j)^2} = a\dfrac{(1+j)}{-1}$
$\lvert\underline{T}(jw)\rvert$	$\lvert T(jw)\rvert = a\dfrac{1}{\left(\frac{w}{w_0}\right)^2}$	$\lvert T(jw)\rvert = a\dfrac{1}{\left(\frac{w}{w_0}\right)}$	$\lvert T(jw)\rvert = a\sqrt{2}$
$G = 20Log\lvert T(jw)\rvert$	$G = 20Log(\dfrac{aw_0^2}{w^2})$	$G = 20Log\left(\dfrac{aw_0}{w}\right)$	$G = 20Log(a) + 3dB$
$Arg\left(\underline{T}(jw)\right)$	$-p$	$-\dfrac{p}{2}$	$\dfrac{p}{4} - p = -\dfrac{3p}{4}$

Exercice 5 : Filtre correcteur :

Certains systèmes électroniques présentent des défauts (précision et stabilité). Pour remédier à cela on utilise des systèmes correcteurs dont voici un exemple :

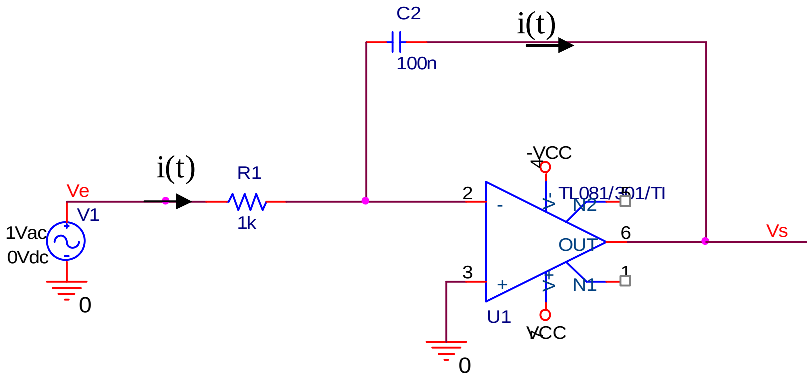


On définit deux pulsations de référence : $w_1 = \dfrac{1}{R_1 C_1}$ et $w_2 = \dfrac{1}{R_2 C_2}$ telles que : $w_1 >> w_2$.

A) ***Etude aux basses pulsations :*** $w << w_2$

1) Dessinez la structure équivalente lorsque l'on travaille à une pulsation w vérifiant : $w << w_2$

D'après le cours, on connaît les modèles équivalents des cellules RC série et parallèle en hautes et basses fréquences. On a alors :



2) Montrez alors que le montage ainsi obtenu est un intégrateur car $v_s(t) = -\dfrac{1}{R_1 C_2}\int v_e(t)dt$

On a, en appliquant la loi d'Ohm :

$v_e(t) = R_1 i(t)$

Connaissant la relation donnant le courant et la tension aux bornes d'un condensateur (c.f cours) :

$i(t) = -C_2 \dfrac{dv_s(t)}{dt}$

A partir des deux relations précédentes, on obtient :

$$\frac{v_e(t)}{R_1} = -C_2 \frac{dv_s(t)}{dt}$$

$$\frac{dv_s(t)}{dt} = -\frac{v_e(t)}{R_1 C_2}$$

$$dv_s(t) = -\frac{v_e(t)}{R_1 C_2} dt$$

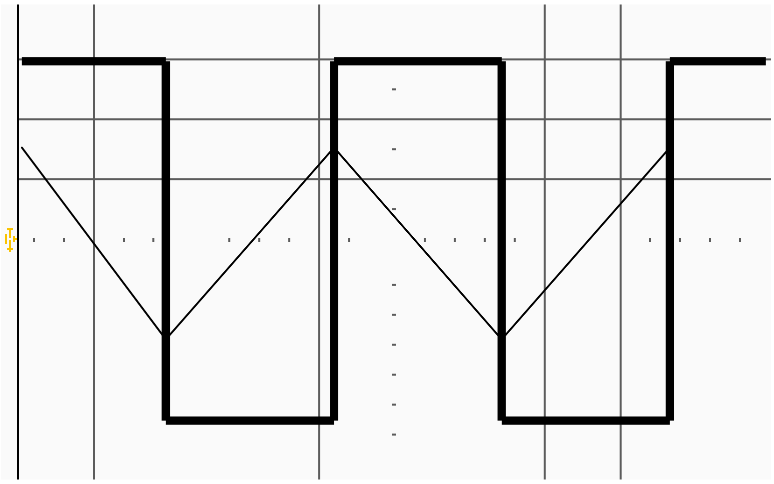
$$\int dv_s(t) = -\int \frac{v_e(t)}{R_1 C_2} dt$$

$$v_s(t) + Cte = -\frac{1}{R_1 C_2} \int v_e(t) dt$$

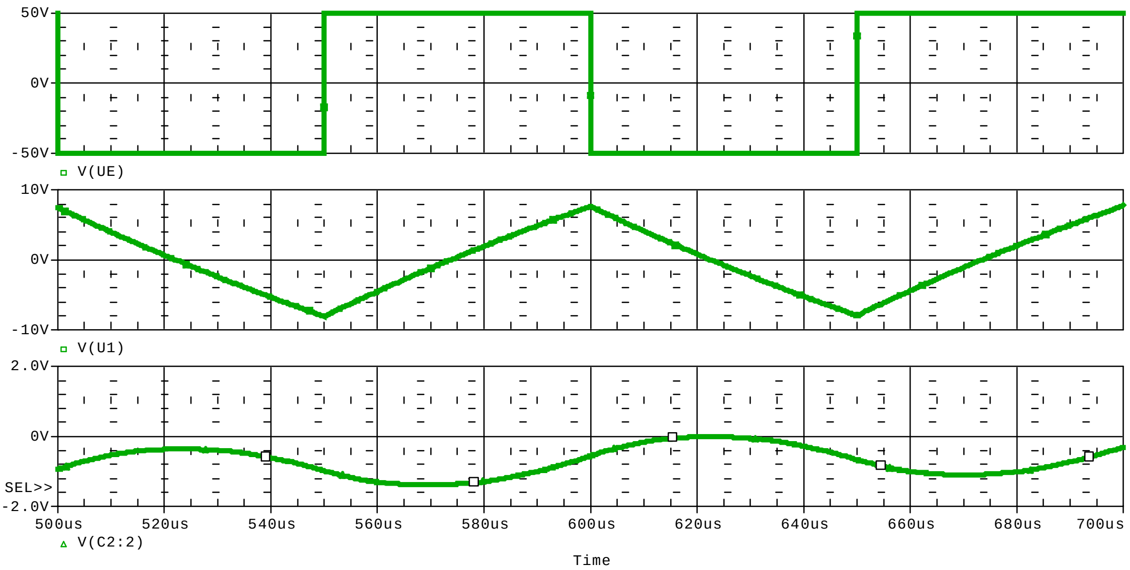
En choisissant cette constante comme nulle (convention arbitraire) alors :

$$v_s(t) = -\frac{1}{R_1 C_2} \int v_e(t) dt$$

3) On considère que la tension d'entrée est celle dessinée ci-dessous. Tracez l'allure de la tension de sortie associée



A titre indicatif voici la simulation faite pour l'action de deux intégrateurs non inverseur :



L'intégration d'une constante A donne une fonction en At + B et l'intégration de cette dernière fonction donne du $0{,}5At^2 + Bt + C$

4) A l'aide de la question 2), donnez l'expression de la fonction de transfert isochrone $\dfrac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}}$ en utilisant la notation complexe

Si on passe en notation complexe alors :

$$\underline{v}_s(t) = -\frac{1}{R_1 C_2}\int \underline{v}_e(t)dt$$

Et en utilisant les propriétés du cours sur la notation complexe :

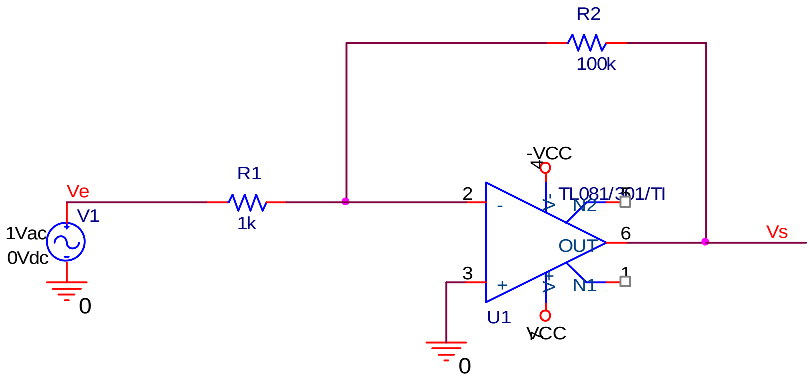
$$\underline{v}_s(t) = -\frac{\underline{v}_e(t)}{R_1 C_2 jw}$$

$$\frac{\underline{v}_s(t)}{\underline{v}_e(t)} = -\frac{1}{R_1 C_2 jw}$$

B) Etude aux pulsations intermédiaires : $w_2 << w << w_1$

1) Dessinez la structure équivalente lorsque la pulsation de travail vérifie : $w_2 << w << w_1$.

Toujours en utilisant les premiers résultats de cours :



2) Déterminez alors la fonction de transfert du système

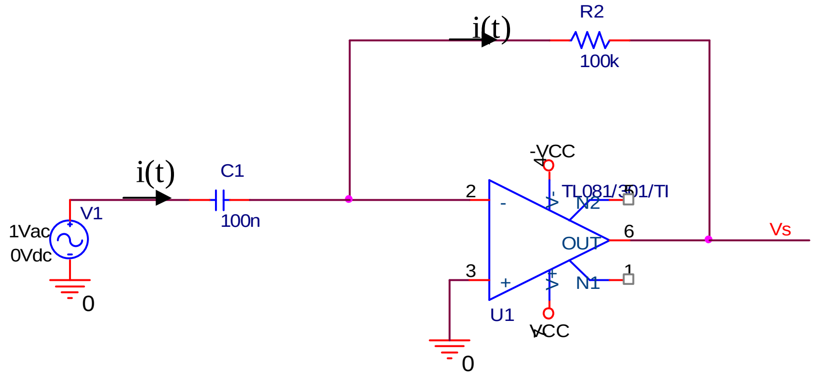
En appliquant Millman :

$$\frac{\dfrac{\underline{v}_e}{R_1}+\dfrac{\underline{v}_s}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}} = 0 \Rightarrow \frac{\underline{v}_e}{R_1}+\frac{\underline{v}_s}{R_2} = 0 \Rightarrow \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = -\frac{R_2}{R_1}$$

C) ***Etude aux hautes pulsations :*** $w_1 << w$

1) Dessinez la structure équivalente lorsque la pulsation de travaille vérifie : $w_1 << w$

Toujours en utilisant les premiers résultats du chapitre :



2) Montrez que $v_s(t) = -R_2 C_1 \dfrac{dv_e(t)}{dt}$

En utilisant la loi d'Ohm et la relation tension/ courant aux bornes d'un condensateur :

$$i(t) = C_1 \frac{dv_e(t)}{dt} = -\frac{v_s(t)}{R_2}$$

$$v_s(t) = -C_1 R_2 \frac{dv_e(t)}{dt}$$

3) En utilisant la notation complexe, donnez l'expression de la fonction de transfert isochrone $\dfrac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e}$.

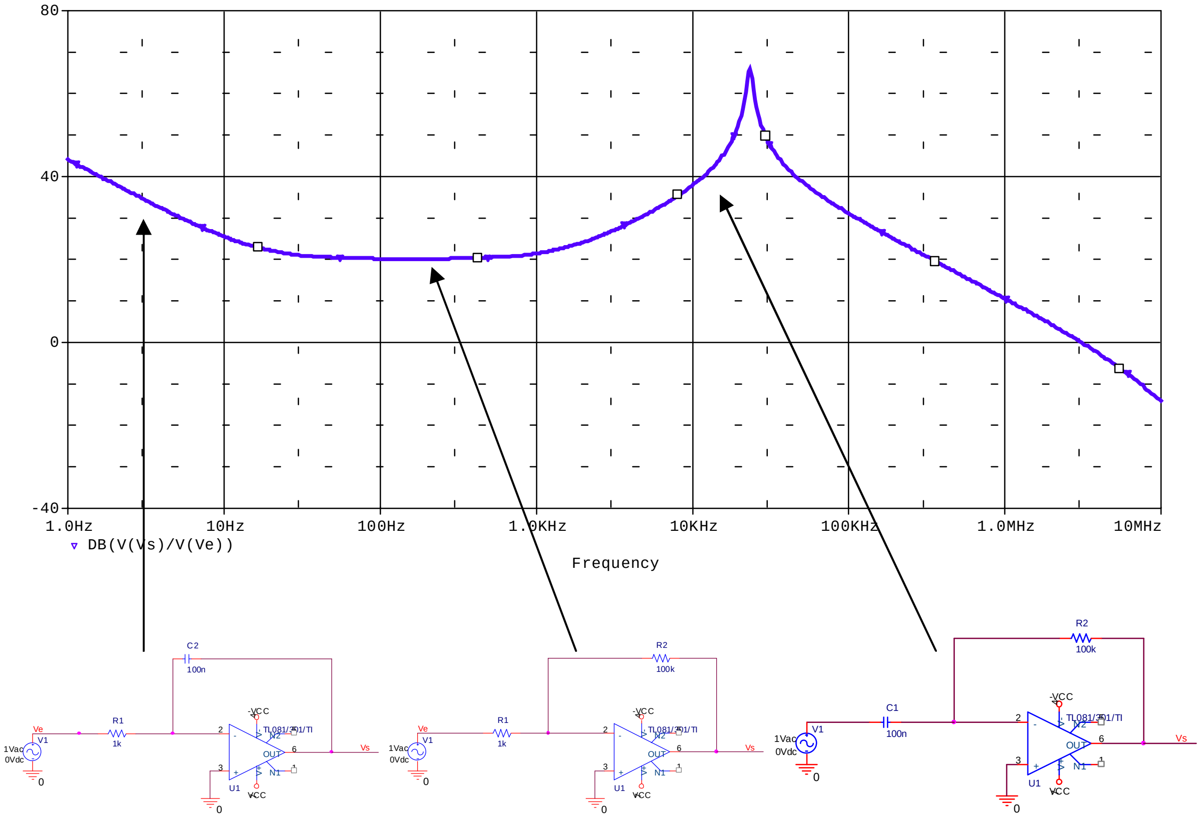
En utilisant les propriétés de la notation complexe :

$$\underline{v}_s(t) = -C_1 R_2 \frac{d\underline{v}_e(t)}{dt}$$

$$\underline{v}_s(t) = -C_1 R_2 jw\underline{v}_e(t)$$

$$\frac{\underline{v}_s(t)}{\underline{v}_e(t)} = -C_1 R_2 jw$$

4) Une simulation sur Orcad donne le diagramme de Bode suivant. Identifiez les trois modes de fonctionnement étudiés précédemment :



La fin du tracé correspond à un comportement en fréquence traduisant les limites d'utilisation d'un A.O en hautes fréquences. Cette caractéristique est donnée dans les documentations constructeur sous la forme d'un produit appelé produit gain bande passante.